Axiom A poset の frame system について

高橋　真　(神戸大学・人間発達環境学研究科)*

[2] で，Axiom A をみたす poset が σ-short にはならないための十分条件を報告した．[2] で与えた条件は次の (C0),(C1),(C2),(C3),(C4) である．

(C0) : $\leqq_n$ は推移的である．

(C1) : $\forall p, q \in P[\exists v \in P[p \geq_n v \ \&\ q \geq_n v] \Rightarrow \exists u \in P[u \geq_n p \ \&\ u \geq_n q]]$

(C2) : $|P/\sim_n| \leq \omega$.（ここで $p \sim_n q \Leftrightarrow \exists u \in P[u \geq_n p \ \&\ u \geq_n q]$）

(C3) : $\forall p, q \in P[p \sim_n q \ \&\ p \geq q \Rightarrow p \geq_n q]$

(C4) : P の任意の pairwise incomparable subset X に対し，

$$\forall p \in P \forall n \in \omega \exists q \leq_n p \forall r \in X[r \not\leq q]$$

Prikry-Silver forcing, Sacks forcing, Laver forcing, Mathias forcing 等多くの Axiom A poset がこれらの条件をみたしている．条件 (C4) は各 Axiom A poset において amalgamation を用いて証明することができ，その証明は Axiom A poset の条件 (A4) をみたすことの証明にも類似している．

定義 (Axiom A)　poset $(P, \leq, \{\leq_n\}_{n\in\omega})$ が Axiom A をみたすとは以下の条件をみたすときをいう．

(A1) : $p \leq_0 q \Rightarrow p \leq q$

(A2) : $p \leq_{n+1} q \Rightarrow p \leq_n q$

(A3) : 任意の $n \in \omega$ に対し $p_{n+1} \leq_n p_n$ が成り立つならば，任意の $n \in \omega$ に対し $q \leq_n p_n$ となる $q \in P$ が存在する．

(A4) : W を $p \in P$ の分割とする．このとき，任意の $n \in \omega$ に対し， $q \leq_n p$ かつ高々可算個の W の元と compatible となる P の元 q が存在する．

[3] で松本は，それらの証明に共通する条件を取出して，(C4) を証明できる形に精密化した．しかし，その条件はかなり複雑であり，各 poset がその条件をみたすことの証明もそれほど簡単ではなかった．

本報告では，松本 [3] で与えた条件を見直し，(A4) と (C4) の証明を統一的に行うための条件について考察する．

(C1) は $p \sim_n q$ が同値条件になるために必要な条件であったが，これを次のより強い条件で置き換える．

(C1a): $\forall p \in P \forall n \in \omega \exists p^* \geq_n p \forall p' \geq_n p[p^* \geq_n p']$

この p^* を $stem_n(p)$ で表し，$p \sim_n q \Leftrightarrow stem_n(p) = stem_n(q)$ とする．

* e-mail: makoto@kobe-u.ac.jp

定義 (frame system)　(C0),(C1a),(C2),(C3) 及び (A1),(A2),(A3) をみたす poset $(P, \leq, \{\leq_n\}_{n\in\omega})$ と $f : P \times \omega \longrightarrow \omega$ に対し，$\{a_{p,n,k}\}_{p\in P, n\in\omega, 0\leq k\leq f(p,n)} \subset P$ が P の frame system であるとは，以下の条件をみたすときをいう．

(FS1) : $\forall n \in \omega \forall p, q \in P [p \sim_n q \Rightarrow f(p,n) = f(q,n)]$

(FS2) : $\forall n \in \omega \forall p \in P \left[\{a_{p,n,k}\}_{0\leq k\leq f(p,n)} \right.$ は p の分割で，

$\left. \{a_{p,n+1,j}\}_{0\leq j\leq f(p,n+1)} \text{は} \{a_{p,n,k}\}_{0\leq k\leq f(p,n)} \text{の細分である．} \right]$

(FS3) : $\forall n \in \omega \forall p, q \in P \left[p \geq_n q \Rightarrow \forall k \in [0, f(p,n)] \left[a_{p,n,k} \geq_0 a_{q,n,k}\right]\right]$

(FS4) : $\forall p, r \in P \left[p \geq r \Rightarrow \exists n \in \omega \exists k \in [0, f(p,n)] \left[a_{p,n,k} \geq_0 r\right]\right]$

(FS5) : $\forall n \in \omega \forall p, r \in P [p \geq r \Rightarrow$

$$\exists q \leq_n p \left[q \geq r \wedge \forall r' \in P[q \geq r' \wedge r \sim_0 r' \wedge r \sim_{p,n+1} r' \Rightarrow r \geq r']\right]$$

(FS6) : $\forall n \in \omega \forall p, r \in P \left[p \geq r \Rightarrow \exists r' \in P \left[r > r' \wedge r \sim_{p,n+1} r'\right]\right]$

(FS7) : $\forall n \in \omega \forall p, r \in P \left[a_{p,n,k} \geq_0 r \Rightarrow a_{p,n,k} \sim_{p,n+1} r\right]$

ここで，

$r \sim_{p,n+1} r' \Leftrightarrow \forall k \in [0, f(stem_n(p), n+1)] \left[r \uparrow a_{stem_n(p),n+1,k} \Leftrightarrow r' \uparrow a_{stem_n(p),n+1,k}\right]$
である．

定理　frame system をもつ poset$(P, \leq, \{\leq_n\}_{n\in\omega})$ は Axiom A をみたし，σ-short ではない．

条件 (C1a),(C2),(C3) はそれぞれ frame system の条件として書くことも可能である．また，frame system をもつ Axiom A poset はさらに条件が必要になるが，[1] で定義されている finiteness property をもつ Axiom A poset とみなすことができる．

参考文献

[1] Heike Mildenberger, The club principle and the distributivity number, Journal of Symbolic Logic, Vol. 76 No.1,2011, pp. 34-46

[2] 髙橋 真 , σ-short ではない Axiom A poset について，日本数学会年会 数学基礎論および歴史分科会，2011.3

[3] 松本 兼宏 , Axiom A をみたす半順序集合の非 σ-short 性について, 修士論文, 神戸大学, 2011.3